

مبحث: دایره

نام دبیر: مهندس سامان اسپهرم
نام دوره: نوروز
شماره جلسه: جلسه چهارم
نام درس و مقطع و رشته: هندسه ۳ - دوازدهم
ریاضی، فیزیک
تاریخ جلسه: ۱۴۰۲/۰۱/۱۱

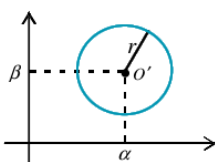
نام کتاب	من در کلاس حل می کنم	خودتان حل کنید (در منزل یا کار در کلاس)
کتاب درسی		
کتاب آبی		
کتاب نوروز		



دایره:

مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت O' دارای فاصله‌ی ثابت r باشد. عدد r «شعاع» و نقطه‌ی O' «مرکز» دایره است. بعلاوه:

معادله‌ی دایره‌ی به مرکز $O' = (\alpha, \beta)$ و شعاع r عبارت است از:



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

در حالت خاص:

معادله‌ی دایره به مرکز مبدأ و شعاع r به صورت $x^2 + y^2 = r^2$ است. به یاد داشته باشید:

قطر دایره برابر $2r$ ، محیط دایره برابر $P = 2\pi \cdot r$ و مساحت برابر $S = \pi \cdot r^2$ است.

سطح دایره‌ی $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 12$ در کدام نواحی مختصات قرار دارد؟

۱ فقط دوم
۲ اول، دوم و سوم

۳ اول و دوم
۴ هر چهار ناحیه

به ازای هر m ، معادله‌ی $(m-2)x + (m+1)y = 6$ ، معادله‌ی قطری از دایره‌ی C است. اگر نقطه‌ی $A(-1, 1)$ روی دایره-

ی C باشد، محیط این دایره کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۱ $2\sqrt{2}\pi$
۲ 2π
۳ 3π
۴ $2\sqrt{3}\pi$

نکته

معادله‌ی گسترده:

اگر در معادله‌ی استاندارد دایره، اتحادها باز شوند، معادله‌ی گسترده‌ی آن به دست خواهد آمد:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (I)$$

بعلاوه:

در معادله‌ی گسترده‌ی بالا، مرکز و شعاع از روابط زیر تعیین می‌گردند:

$$O' = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

توجه کنید:

- در معادله‌ی گسترده، همیشه ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر است.
- شرط آن که معادله‌ای به فرم (I) مربوط به یک دایره باشد آن است که: $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

بویژه:

اگر $c < 0$ باشد، معادله الزاماً مربوط به دایره است.



❓ به ازای کدام مقادیر t ، معادله‌ی $x^2 + y^2 + 2x + 4y = \frac{t}{3}$ مربوط به یک دایره است؟

- ① $t > 0$ ② $t > -15$ ③ $t < 15$ ④ $t > 15$

❓ کمترین مقدار x در معادله‌ی $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ کدام است؟

- ① $-1 - \sqrt{5}$ ② $-2\sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$ ④ $1 - 2\sqrt{5}$

❓ شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ برابر کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

❓ مکان هندسی نقطه‌ای که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $A(0, 2)$ برابر فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $B(-1, 0)$ باشد، یک دایره است. مرکز این دایره روی کدام خط قرار دارد؟

- ① $y - 2x = 2$ ② $y + 2x = 2$ ③ $2y - x = 2$ ④ $2y + x = 2$

نکته

وضع نقطه و دایره:

هر نقطه نسبت به یک دایره فقط سه حالت دارد:

درون دایره یا روی دایره یا بیرون دایره

روش تشخیص:

معادله‌ی دایره را به یکی از صورت‌های زیر می‌نویسیم:

$$P(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0 \quad \text{یا} \quad P(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

فرض کنید $A = (x_0, y_0)$ نقطه‌ی دلخواهی از صفحه باشد. آنگاه:

- نقطه‌ی A داخل دایره است، هرگاه: $P(x_0, y_0) < 0$.
- نقطه‌ی A روی دایره است، هرگاه: $P(x_0, y_0) = 0$.
- نقطه‌ی A خارج دایره است، هرگاه: $P(x_0, y_0) > 0$.

بعلاوه:

در حالت اول «هیچ»، در حالت دوم «یک» و در حالت سوم «دو» مماس از نقطه بر دایره رسم می‌شود.

روش دیگر:

محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه تا مرکز دایره و سپس مقایسه‌ی آن با شعاع دایره است.

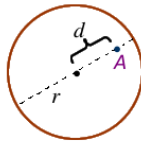
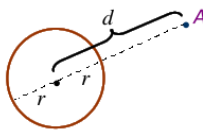
❓ حدود m برای آن که از نقطه‌ی $A = (m+1, m)$ هیچ مماسی بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x = -3$ رسم نشود، کدام است؟

- ① $0 < m < 1$ ② $0 \leq m \leq 1$
 ③ $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$ ④ $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$



توجه کنید:

ممکن است با موارد زیر مواجه شوید، تشخیص با رسم شکل آسان است:



❖ وقتی یک نقطه به فاصله d از مرکز در بیرون دایره باشد،

• کمترین فاصله نقاط دایره تا آن برابر $d - r$ است.

• بیشترین فاصله نقاط دایره تا آن برابر $d + r$ است.

❖ وقتی یک نقطه به فاصله d از مرکز در درون دایره باشد،

• کمترین فاصله نقاط دایره تا آن برابر $r - d$ است.

• بیشترین فاصله نقاط دایره تا آن برابر $r + d$ است.

(در هر دو حالت: بیشترین فاصله $d + r$ و کمترین فاصله $|d - r|$ است)

❓ اختلاف بیشترین و کمترین فاصله نقاط دایره $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$ از مبدأ کدام است؟

۲ ④

۲√۵ ③

۲√۳ ②

۳ ①

نکته

وضع خط و دایره:

خط و دایره به شعاع r نسبت به هم سه حالت دارند:

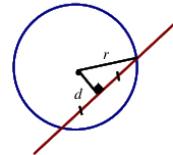
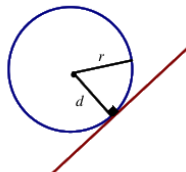
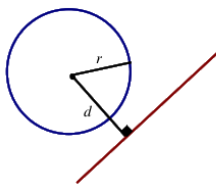
جدا از هم یا مماس بر هم یا متقاطع در دو نقطه

برای تشخیص، مقدار d ، یعنی: «فاصله مرکز دایره تا خط» را حساب می‌کنیم. در این صورت:

▪ اگر $d < r$ ، آنگاه خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

▪ اگر $d = r$ ، آنگاه خط در یک نقطه بر دایره مماس است.

▪ اگر $d > r$ ، آنگاه خط با دایره هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارد.



توجه مهم:

▪ وقتی از مرکز به وتر عمود رسم می‌کنید، همواره وتر نصف می‌شود. (شکل سمت راست)

▪ وقتی خط بر دایره مماس است، خط و شعاع در نقطه‌ی تماس بر هم عمود هستند. (شکل وسط)

❓ طول پاره خطی که دایره $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$ از خط $5x + 12y = 14$ جدا می‌کند، کدام است؟

۷ ④

۸ ③

۹ ②

۱۰ ①

$$\begin{cases} 3x + 4y = -m \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \end{cases}$$

❓ حدود m برای آن که دستگاه مقابل دارای جواب حقیقی باشد، کدام است؟

$$-4 \leq m \leq 26 \quad ②$$

$$4 \leq m \leq 26 \quad ①$$

$$-26 \leq m \leq 4 \quad ④$$

$$-26 \leq m \leq -4 \quad ③$$

❓ معادله‌ی دایره‌ای که خطوط $x + y = 3$ و $2x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $3x + 4y + 5 = 0$ بر آن مماس

باشد، کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4 \quad ②$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y + 5 = 0 \quad ①$$

$$x^2 + y^2 - x + 3y + 2 = 0 \quad ④$$

$$x^2 + y^2 - 5x + y = 2 \quad ③$$



از بین دایره‌های گذرا از نقطه‌ی $A(1, -4)$ و مماس بر خط‌های $4x + 3y = 0$ و محور y ها، بزرگ‌ترین شعاع دایره کدام

است؟ (کنکور ۹۹)

۱ $\frac{5}{3}$

۲ $\frac{7}{3}$

۳ $\frac{17}{9}$

۴ $\frac{22}{9}$